Contrôle d'informatique

Exercice 1

a) Pour que la formule (1) soit exacte au moins pour les polynômes de degré $\leqslant 1$ il faut qu'elle le soit pour $f : x \to 1$ et $f : x \to x$, ce qui conduit aux relations :

$$\begin{cases} h = \alpha + \beta \\ \frac{1}{2}(a+h)^2 - \frac{1}{2}a^2 = \alpha a + \beta(a+h) \end{cases} \iff \begin{cases} h = \alpha + \beta \\ ah + \frac{h^2}{2} = (\alpha+\beta)a + \beta h \end{cases} \iff \alpha = \beta = \frac{h}{2}.$$

On peut observer que l'approximation obtenue correspond à la méthode du trapèze.

b) On a $\mathrm{R}(h) = \mathrm{F}(a+h) - \frac{h}{2}f(a) - \frac{h}{2}f(a+h)$ donc R est une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ telle que $\mathrm{R}(0) = 0$, et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}'(h) &= \frac{1}{2}\Big(f(a+h) - f(a)\Big) - \frac{h}{2}f'(a+h) && \text{donc} \quad \mathrm{R}'(0) = 0 \\
\mathrm{R}''(h) &= -\frac{h}{2}f''(a+h) && \text{donc} \quad \mathrm{R}''(0) = 0 \\
\mathrm{R}^{(3)}(h) &= -\frac{1}{2}f''(a+h) - \frac{h}{2}f^{(3)}(a+h) && \text{donc} \quad \mathrm{R}^{(3)}(0) = -\frac{f''(a)}{2} \\
\mathrm{R}^{(4)}(h) &= -f^{(3)}(a+h) - \frac{h}{2}f^{(4)}(a+h) && \text{donc} \quad \mathrm{R}^{(4)}(0) = -f^{(3)}(a)
\end{aligned}$$

La formule de Taylor-Young : $\mathrm{R}(h) = \mathrm{R}(0) + h\mathrm{R}'(0) + \frac{h^2}{2}\mathrm{R}''(0) + \frac{h^3}{6}\mathrm{R}^{(3)}(0) + \frac{h^4}{24}\mathrm{R}^{(4)}(0) + \mathrm{o}(h^4)$ s'écrit donc :

$$\mathrm{R}(h) = -\frac{h^3}{12}f''(a) - \frac{h^4}{24}f^{(3)}(a) + \mathrm{o}(h^4).$$

c) On utilise les approximations : $\mathrm{I}_1 \approx \frac{h}{4}f(a) + \frac{h}{4}f(a+h/2)$ et $\mathrm{I}_2 \approx \frac{h}{4}f(a+h/2) + \frac{h}{4}f(a+h)$ pour approcher I par :

$$\mathrm{J}(h) = \frac{h}{4}f(a) + \frac{h}{2}f(a+h/2) + \frac{h}{4}f(a+h).$$

d) On a $\mathrm{I}(h) = \mathrm{I} - \mathrm{R}(h)$ et $\mathrm{J}(h) = \mathrm{I} - r(h)$ donc :

$$\lambda\mathrm{J}(h) + \mu\mathrm{I}(h) = (\lambda+\mu)\mathrm{I} + \Big(\frac{\lambda}{4} + \mu\Big)\frac{h^3}{12}f''(a) + \Big(\frac{\lambda}{4} + \mu\Big)\frac{h^4}{24}f^{(3)}(a) + \mathrm{o}(h^4)$$

On résout le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 4\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \frac{4}{3}$ et $\mu = -\frac{1}{3}$ et avec un tel choix, $\frac{4\mathrm{J}(h) - \mathrm{I}(h)}{3} = \mathrm{I} + \mathrm{o}(h^4)$.

e) On calcule $\frac{4\mathrm{J}(h) - \mathrm{I}(h)}{3} = \frac{h}{6}f(a) + \frac{2h}{3}f(a+h/2) + \frac{h}{6}f(a+h)$ pour reconnaître la méthode de Simpson.

Exercice 2

a) On effectue le calcul suivant :

$$(x-\alpha)p_1(x) + b_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i - \alpha\sum_{i=1}^{n} b_i x^{i-1} + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i - \alpha\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}x^i = b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1}(b_i - \alpha b_{i+1})x^i = a_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = p(x).$$

On peut observer que le calcul de $b_0 = p(\alpha)$ nécessite n additions et n multiplications, ce qui est moindre qu'une démarche naïve aui utilise au mieux n additions et $2n$ multiplications.

b) On a $p'(x) = p_1(x) + (x-\alpha)p_1'(x)$ donc $p'(\alpha) = p_1(\alpha)$. Appliquons le schéma de Hörner au polynôme p_1 en définissant la suite $(c_1, \ldots, c_n)$ par :

$$c_n = b_n \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ c_i = b_i + \alpha c_{i+1}$$

Compte tenu de la question précédente nous avons $c_1 = p_1(\alpha) = p'(\alpha)$.

c) On nous demande de calculer $x_0 - \dfrac{p(x_0)}{p'(x_0)}$ à l'aide du schéma de Hörner ; il suffit de calculer b_0 et c_1 associés à la valeur $\alpha = x_0$.

```python
def newton_horner(p, x):
    n = len(p)-1
    b, c = p[n], p[n]
    for i in range(n-1, 0, -1):
        b = p[i] + x * b
        c = b + x * c
    b = p[0] + x * b
    return x - b / c
```