Contrôle d'informatique

Durée : 1 heure

Étant donnée une fonction $f : [u,v] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on souhaite approcher la quantité $\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$ par l'expression

$$\mathrm{I}(f) = \lambda_0 f(u) + \lambda_1 f'(u) + \lambda_2 f'(\xi)$$

où $\xi \in]u,v[$ et λ_0, λ_1, λ_2 sont des réels pour l'instant non encore déterminés.
On définit l'erreur de la méthode en posant : $\mathrm{E}(f) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{I}(f)$.

Question 1. Déterminer les paramètres ξ, λ_0, λ_1, λ_2 pour que la formule d'approximation soit exacte pour toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.
On pourra observer qu'il faut et il suffit que cette formule soit exacte pour les fonctions polynomiales $x \mapsto 1$, $x \mapsto (x-u)$, $x \mapsto (x-u)^2$ et $x \mapsto (x-u)^3$.

Question 2. Les paramètres ξ, λ_0, λ_1 et λ_2 étant ainsi fixés, calculer $\mathrm{E}(f)$ pour $f : x \mapsto (x-u)^4$ et en déduire l'ordre de la méthode.

Question 3. On admet l'existence d'un unique polynôme P_f de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les relations :

$$\mathrm{P}_f(u) = f(u), \qquad \mathrm{P}_f'(u) = f'(u), \qquad \mathrm{P}_f(\xi) = f(\xi), \qquad \mathrm{P}_f'(\xi) = f'(\xi).$$

Montrer que $\mathrm{E}(f) = \int_u^v \big(f(t) - \mathrm{P}_f(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

Question 4. Dans cette question on suppose le réel t fixé dans $]u,v[\setminus \{\xi\}$ et on pose

$$\varphi(x) = f(x) - \mathrm{P}_f(x) - \mathrm{K}\frac{(x-u)^2(x-\xi)^2}{24}$$

le réel K étant choisi pour vérifier l'égalité $\varphi(t) = 0$.
Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^4$ il existe un réel $c \in]u,v[$ tel que $\mathrm{K} = f^{(4)}(c)$.

Question 5. On suppose toujours f de classe $\mathscr{C}^4$ sur le segment $[u,v]$ et on note M_4 un majorant de $|f^{(4)}|$ sur cet intervalle.
Déduire de la question précédente que $|\mathrm{E}(f)| \leqslant \frac{\mathrm{M}_4}{720}(v-u)^5$.

Question 6. Donner l'expression de la méthode composite attachée à cette méthode de quadrature, et donner une majoration de l'erreur pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a,b]$ lorsque cet intervalle est subdivisé en n sous-intervalles.

Question 7. Rédiger enfin en Python une fonction `integral` qui applique cette méthode composite pour retourner une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a,b]$. On justifiera le choix des arguments de cette fonction.