Corrigé du contrôle d'informatique

Exercice 1

Question 1.

a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $x_{n,k} = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Alors $\mathrm{R}_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k})$.

b) La méthode composite du trapèze s'écrit :

$$\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_{n,k})+f(x_{n,k+1})}{2} = \frac{b-a}{2n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) + \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})\Big) = \frac{b-a}{2n}\Big(2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) + f(x_{n,n}) - f(x_{n,0})\Big)$$
$$= \mathrm{R}_n(f) + \frac{b-a}{n}\Big(\frac{f(b)-f(a)}{2}\Big).$$

c) On a $x_{2n,2j} = a + 2j\dfrac{b-a}{2n} = x_{n,j}$ et $x_{2n,2j+1} = a + (2j+1)\dfrac{b-a}{2n} = x_{n,j} + \dfrac{b-a}{2n} = \dfrac{x_{n,j}+x_{n,j+1}}{2}$. Ainsi,

$$\mathrm{R}_{2n}(f) = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} f(x_{2n,k}) = \frac{b-a}{2n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2n,2j}) + \frac{b-a}{2n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2n,2j+1}) = \frac{b-a}{2n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{n,j}) + \frac{b-a}{2n}\sum_{j=0}^{n-1} f\Big(\frac{x_{n,j}+x_{n,j+1}}{2}\Big)$$
$$= \frac{\mathrm{R}_n(f)+\mathrm{M}_n(f)}{2}.$$

Question 2. On définit la fonction :

```python
def milieu(f, a, b, n):
    s = 0
    h = (b - a) / n
    x = a + h / 2
    for k in range(n):
        s += f(x)
        x += h
    return h * s
```

Question 3.

a) On a $\mathrm{T}_{2n}(f) = \mathrm{R}_{2n}(f) + \dfrac{b-a}{2n}\Big(\dfrac{f(b)-f(a)}{2}\Big) = \dfrac{\mathrm{R}_n(f)+\mathrm{M}_n(f)}{2} + \dfrac{b-a}{2n}\Big(\dfrac{f(b)-f(a)}{2}\Big) = \dfrac{\mathrm{T}_n(f)+\mathrm{M}_n(f)}{2}$.

Pour $n = 2^{p-1}$ on en déduit que $\mathrm{T}_{2^p}(f) = \dfrac{\mathrm{T}_{2^{p-1}}(f)+\mathrm{M}_{2^{p-1}}(f)}{2}$.

b) Sachant que $\mathrm{T}_{2^0}(f) = \mathrm{T}_1(f) = (b-a)\Big(\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\Big)$, on en déduit la fonction :

```python
def trap_dicho(f, a, b, epsilon):
    n = 1
    t1 = (b - a) * (f(a) + f(b)) / 2
    t2 = (t1 + milieu(f, a, b, 1)) / 2
    while abs(t2 - t1) > epsilon:
        n *= 2
        t1, t2 = t2, (t2 + milieu(f, a, b, n)) / 2
    return t2
```

Exercice 2

Question 4. Pour tout $x > 0$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(0) - \int_0^x \mathrm{d}t = f(0) - x$ donc $\displaystyle\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$.

Pour tout $x < 0$, $f(x) = f(0) - \displaystyle\int_x^0 f'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(0) + \int_x^0 \mathrm{d}t = f(0) - x$ donc $\displaystyle\lim_{-\infty} f(x) = +\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires associé à la continuité de la fonction f assure l'existence d'un zéro dans $\mathbb{R}$; la fonction f étant strictement décroissante, ce dernier est unique.

Question 5.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + \alpha f'(x)$ donc $1 - 2\alpha \leqslant g'(x) \leqslant 1 - \alpha$.
Sachant que $\alpha \in]0,1[$ on a $0 < 1 - \alpha < 1$ et $-1 < 1 - 2\alpha < 1$; en posant $k = \max(1-\alpha, 2\alpha - 1)$, on a bien $k \in]0,1[$ et $|g'(x)| \leqslant k$.

b) On a $g(c) = c$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - c| = |g(x_n) - g(c)| \leqslant k|x_n - c|$ d'après l'inégalité des accroissements finis.
On en déduit par récurrence la majoration : $|x_n - c| \leqslant k^n |x_0 - c|$. Et puisque $k \in]0,1[$, il en résulte $\lim x_n = c$.

Question 6. $\lim\left|\dfrac{x_{n+1} - c}{x_n - c}\right| = \lim\left|\dfrac{g(x_n) - g(c)}{x_n - c}\right| = |g'(c)|$ puisque (x_n) converge vers c.
Or $g'(c) = 1 + \alpha f'(c)$, donc si $\alpha \neq -\dfrac{1}{f'(c)}$, $|g'(c)| \neq 0$ et la convergence est d'ordre 1.
Si $\alpha = -\dfrac{1}{f'(c)}$, $g'(c) = 0$. On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $g(x_n) = g(c) + g''(c)\dfrac{(x_n - c)^2}{2} + \mathrm{o}\Big((x_n - c)^2\Big)$ donc
$\lim\left|\dfrac{x_{n+1} - c}{(x_n - c)^2}\right| = \lim\left|\dfrac{g(x_n) - g(c)}{(x_n - c)^2}\right| = \left|\dfrac{g''(c)}{2}\right| = \left|\alpha\dfrac{f''(c)}{2}\right|$, et la convergence est d'ordre 2 si $f''(c) \neq 0$, au moins d'ordre 2 sinon.

Question 7.

a) Dans la pratique, choisir $\alpha = -\dfrac{1}{f'(c)}$ est impossible puisque on ne connait pas c. Remplacer α par une valeur proche, ici $-\dfrac{1}{f'(x_n)}$, conduit à la méthode de Newton-Raphson.

b) On trace la droite passant par le point $(x_n, f(x_n))$ et de pente $-\alpha$; son intersection avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(x_{n+1}, 0)$.