Épreuve de mathématiques-informatique ENS 2003

L'épreuve de cette année portait sur la combinatoire des groupes symétriques, l'un des objectifs principaux étant la démonstration de la correspondance de Robinson-Schensted. La première partie introduit la notion de plus longue sous-suite d'une permutation et propose une version allégée de l'algorithme de Robinson- Schensted sous forme de réussite (jeu de cartes à un joueur). La seconde partie introduit les tableaux de Young et l'algorithme proprement dit. La troisième partie s'intéresse aux représentations linéaires du groupe symétrique. La dernière question permet d'unifier le sujet en explorant quelques aspects élémentaires des liens entre ces représentations et les tableaux de Young.

(extrait du rapport du jury)

Partie 1. Cartes, mélange et réussite

Question 1.1 Si $\sigma = eg_1 \cdots g_k$ avec $g_i \in \mathcal{U}$ alors $\sigma^{-1} = eg_k^{-1} \cdots g_1^{-1}$ avec $g_i^{-1} \in \mathcal{U}$ donc $\mathrm{U}(\sigma^{-1}) \leqslant \mathrm{U}(\sigma)$. De même, $\mathrm{U}(\sigma^{-1}) \leqslant \mathrm{U}(\sigma)$ et en définitive $\mathrm{U}(\sigma^{-1}) = \mathrm{U}(\sigma)$.

Posons $p = \mathrm{U}(\sigma)$ et $q = \mathrm{U}(\tau)$. Il existe $g_1, \dots, g_p$ et $h_1, \dots, h_q$ dans $\mathcal{U}$ tels que $\sigma = eg_1 \cdots g_p$ et $\tau = eh_1 \cdots h_q$ donc $\sigma\tau = eg_1 \cdots g_p h_1 \cdots h_q$ et $\mathrm{U}(\sigma\tau) \leqslant p + q = \mathrm{U}(\sigma) + \mathrm{U}(\tau)$.

Question 1.2 Sans perte de généralité supposons $i < j$.

- Si $j = i+1$ alors $(i,j) \in \mathcal{U}$ et $\mathrm{U}((i,j)) = 1$.
- Si $j \geqslant i+2$, alors $(i,j) = ec_{i,j}c_{i,j-1}^{-1} = ec_{i,j}c_{j-1,i}$ donc $\mathrm{U}((i,j)) \leqslant 2$. Mais on ne peut avoir $\mathrm{U}((i,j)) = 1$ car $(i,j) \notin \mathcal{U}$, donc $\mathrm{U}((i,j)) = 2$.

Question 1.3 Comme le suggère l'énoncé, commençons par prouver que $|\mathrm{L}(\sigma c_{i,j}) - \mathrm{L}(\sigma)| \leqslant 1$.
Soit $i_1 < i_2 \cdots < i_k$ une sous-suite croissante de σ avec $k = \mathrm{L}(\sigma)$, et $i < j$.

- Si $i_k < i$ alors $i_1 < \cdots < i_k$ est toujours une sous-suite croissante de $\sigma c_{i,j}$ donc $\mathrm{L}(\sigma) \leqslant \mathrm{L}(\sigma c_{i,j})$:

$$\sigma : \quad \cdots\sigma(i_1)\cdots\cdots\cdots\sigma(i_k)\cdots\cdots\cdots\sigma(i)\cdots\cdots\cdots\sigma(j)\cdots$$

$$\sigma c_{i,j} : \quad \cdots\sigma(i_1)\cdots\cdots\cdots\sigma(i_k)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\sigma(j)\sigma(i)\cdots$$

  (La carte de rang i est placée après celle de rang j.)

- Sinon, on considère l'indice minimal p tel que $i \leqslant i_p$ et l'indice maximal q tel que $i_q \leqslant j$. En d'autres termes :

$$i_1 < \cdots < i_{p-1} < i \leqslant i_p < \cdots < i_q \leqslant j < i_{q+1} < \cdots < i_k.$$

  (On peut bien sûr avoir $p = 1$ ou $q = k$.)
  Alors $i_1 < \cdots < i_{p-1} < i_{p+1} < \cdots < i_q < i_{q+1} < \cdots < i_k$ est une sous-suite croissante de $\sigma c_{i,j}$:

$$\sigma : \quad \cdots\sigma(i_1)\cdots\cdots\sigma(i_{p-1})\cdots\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(i_{p+1})\cdots\sigma(i_q)\cdots\sigma(j)\cdots\cdots\sigma(i_{q+1})\cdots\cdots\sigma(i_k)\cdots$$

$$\sigma c_{i,j} : \quad \cdots\sigma(i_1)\cdots\cdots\sigma(i_{p-1})\cdots\cdots\cdots\sigma(i_{p+1})\cdots\sigma(i_q)\cdots\sigma(j)\sigma(i)\cdots\cdots\sigma(i_{q+1})\cdots\cdots\sigma(i_k)\cdots$$

  ce qui prouve que $\mathrm{L}(\sigma c_{i,j}) \geqslant \mathrm{L}(\sigma) - 1$.

Dans les deux cas nous avons $\mathrm{L}(\sigma c_{i,j}) \geqslant \mathrm{L}(\sigma) - 1$. On prouve de la même façon cette égalité lorsque $j < i$, en traitant les cas $j < i_1$ et $j \geqslant i_1$.
Enfin, en appliquant cette inégalité à $\sigma c_{j,i}$ on prouve que pour $i \neq j$ on a $\mathrm{L}(\sigma) \geqslant \mathrm{L}(\sigma c_{j,i}) - 1$.
En définitive nous avons prouvé que pour $i \neq j$ on a $\mathrm{L}(\sigma c_{i,j}) \geqslant \mathrm{L}(\sigma) - 1$ et $\mathrm{L}(\sigma) \geqslant \mathrm{L}(\sigma c_{i,j}) - 1$, soit $|\mathrm{L}(\sigma) - \mathrm{L}(\sigma c_{i,j})| \leqslant 1$.

Venons-en maintenant à l'égalité demandée, posons $k = \mathrm{U}(\sigma)$ et notons $\sigma = eg_1 \cdots g_k$ avec $g_i \in \mathcal{U}$. Nous venons de prouver que $|\mathrm{L}(eg_1 \cdots g_i) - \mathrm{L}(eg_1 \cdots g_{i+1})| \leqslant 1$ donc $|\mathrm{L}(e) - \mathrm{L}(\sigma)| \leqslant k$. Mais $\mathrm{L}(e) = n$ donc $n - \mathrm{L}(\sigma) \leqslant k$, soit $\mathrm{U}(\sigma) + \mathrm{L}(\sigma) \geqslant n$.

Il reste à prouver que $\mathrm{U}(\sigma) + \mathrm{L}(\sigma) \leqslant n$, ce que nous allons faire en raisonnant par récurrence sur $n - \mathrm{L}(\sigma)$.

- Si $\mathrm{L}(\sigma) = n$ alors $\sigma = e$ et $\mathrm{U}(e) = 0$.
- Si $\mathrm{L}(\sigma) < n$, supposons le résultat acquis pour les permutations σ' telles que $\mathrm{L}(\sigma') \geqslant \mathrm{L}(\sigma) + 1$.

  Posons $k = \mathrm{L}(\sigma)$ et considérons une sous-suite croissante $i_1 < \cdots < i_k$ pour σ.

  - Si $i_1 > 1$, posons $i = i_1 - 1$ et $j = i_p$, où p est le plus grand entier vérifiant $\sigma(i_p) < \sigma(i)$ (un tel entier existe forcément car par maximalité de k, $\sigma(i_1) < \sigma(i)$) :

    $$\sigma : \quad \cdots\cdot \sigma(i)\, \sigma(i_1) \cdots\cdots\cdots\cdots \sigma(i_p) \cdots\cdots \sigma(i_k) \cdots\cdot$$

    $$\sigma c_{i,j} : \quad \cdots\cdot \sigma(i_1) \cdots\cdots\cdots\cdots \sigma(i_p)\, \sigma(i) \cdots\cdots \sigma(i_k) \cdots\cdot$$

    Nous venons de mettre en évidence une sous-suite croissante de longueur $k + 1$ pour $\sigma c_{i,j}$.
  - Si $i_k < n$, posons $i = i_k + 1$ et $j = i_p$, où p est le plus petit entier vérifiant $\sigma(i_p) > \sigma(i)$:

    $$\sigma : \quad \cdots\cdot \sigma(i_1) \cdots\cdots\cdots\cdots \sigma(i_p) \cdots\cdots\cdots \sigma(i_k)\, \sigma(i) \cdots\cdot$$

    $$\sigma c_{i,j} : \quad \cdots\cdot \sigma(i_1) \cdots\cdots\cdots\cdots \sigma(i)\, \sigma(i_p) \cdots\cdots\cdots \sigma(i_k) \cdots\cdot$$

    $\sigma c_{i,j}$ possède une sous-suite croissante de taille $k + 1$.
  - Enfin, si $i_1 = 1$ et $i_k = n$ il existe $p \in [\![1, k-1]\!]$ tel que $i_p + 1 < i_{p+1}$. On pose $i = i_p + 1$ et $j = i_q$ avec $\sigma(i_q) < \sigma(i) < \sigma(i_{q+1})$ (avec la convention $i_0 = 0$ et $i_{k+1} = n + 1$) :

    $$\sigma : \quad \sigma(i_1) \cdots\cdots \sigma(i_p)\, \sigma(i) \cdots \sigma(i_{p+1}) \cdots\cdot \sigma(i_q) \cdots\cdots \sigma(i_{q+1}) \cdots\cdots \sigma(i_k)$$

    $$\sigma c_{i,j} : \quad \sigma(i_1) \cdots\cdots \sigma(i_p) \cdots \sigma(i_{p+1}) \cdots\cdot \sigma(i_q)\, \sigma(i) \cdots\cdots \sigma(i_{q+1}) \cdots\cdots \sigma(i_k)$$

    Là encore, nous avons mis en évidence une sous-suite croissante de taille $k + 1$ pour $\sigma c_{i,j}$.

  Dans tous les cas, nous avons montré l'existence de (i, j) tel que $\mathrm{L}(\sigma c_{i,j}) \geqslant k + 1$. Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{U}(\sigma c_{i,j}) + \mathrm{L}(\sigma c_{i,j}) \leqslant n$, donc $\mathrm{U}(\sigma c_{i,j}) \leqslant n - k - 1$.

  Or d'après la question 1.1, $\mathrm{U}(\sigma) = \mathrm{U}(\sigma c_{i,j} c_{j,i}) \leqslant \mathrm{U}(\sigma c_{i,j}) + 1$ donc $\mathrm{U}(\sigma) \leqslant n - k$, soit $\mathrm{U}(\sigma) + \mathrm{L}(\sigma) \leqslant n$.

La récurrence est achevée et on peut conclure : $\mathrm{U}(\sigma) + \mathrm{L}(\sigma) = n$.

Question 1.4 Il est évident que lors de la réussite, chaque colonne reste triée par ordre décroissant de haut en bas. Ainsi, si on considère une sous-suite croissante maximale $i_1 < \cdots < i_k$, pour tout $p \in [\![2, k]\!]$ $\sigma(i_p)$ ne peut être placé au bas d'aucune des colonnes contenant $\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_{p-1})$. Chacune de ces valeurs est donc placée dans une colonne différente et Le nombre de colonnes de la réussite est au moins égal à k.

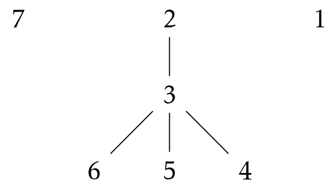
Intéressons-nous maintenant à la réciproque, en prouvant par récurrence sur k que pour tout élément $\sigma(j)$ de la k^{e} colonne il existe une sous-suite croissante $i_1 < \cdots < i_k = j$ pour σ tel que $\sigma(i_p)$ soit dans la colonne p, $1 \leqslant p \leqslant k$.

- C'est clair pour $k = 1$.
- Si $k > 1$, supposons le résultat acquis au rang $k - 1$. Au moment où $\sigma(j)$ est inséré à la base de la k^{e} colonne, la base de la $(k-1)^{\text{e}}$ colonne est inférieure à $\sigma(j)$. Notons celle-ci $\sigma(i_{k-1})$. Par hypothèse de récurrence il existe $i_1 < \cdots < i_{k-1}$ tel que $\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_{k-1})$. En posant $i_k = j$ on obtient une sous-suite croissante de longueur k.

Question 1.5 La question précédente nous donne la démarche à suivre : on simule la réussite, en notant dans un tableau t et pour chaque élément x inséré dans une colonne autre que la première l'élément $t[x]$ qui se trouve à la base de la colonne située à sa gauche (qui désigne un élément susceptible de le précéder dans une sous-suite croissante de longueur au moins égale à l'indice de la colonne).

Une fois la réussite terminée, on connait le nombre $\mathrm{L}(\sigma)$, et le tableau créé t représente une forêt (dans cette représentation, $t[x]$ désigne le père de x). On obtient une sous-suite croissante en calculant la liste des ancêtres d'un des éléments situé dans la dernière colonne.

Par exemple, avec l'exemple $\sigma = (7, 2, 3, 6, 1, 5, 4)$ de l'énoncé on obtient la forêt suivante :



En pseudo-code, on rédige deux fonctions : la première calcule le tableau t et un élément de la dernière colonne, la seconde extrait de ce tableau une sous-suite croissante maximale.

```
fonction RÉUSSITE(σ)
    t(1..n) = (i | 1 ⩽ i ⩽ n)
    colonne(1) ← [σ(1)]
    nbColonnes ← 1
    dernier ← σ(1)
    pour i ∈ ⟦2, n⟧ faire
        j = 1
        tant que j <= nbColonnes et head(colonne(j)) > σ(i) faire
            j ← j + 1
        si j <= nbColonnes alors
            colonne(j) ← σ(i) :: colonne(j)
        else
            colonne(j) ← [σ(i)]
            nbColonnes ← nbColonnes + 1
            dernier ← σ(i)
        si j > 1 alors
            t(σ(i)) ← head(colonnes(j − 1))
    renvoyer (t, dernier)
```

```
fonction SSCM(t, dernier)
    i ← dernier
    sousSuite ← [i]
    tant que t(i) ≠ i faire
        i ← t(i)
        sousSuite ← i :: sousSuite
    renvoyer sousSuite
```

Question 1.6 Considérons une permutation σ, et $\tau = (i, i+1)$:

$$\begin{array}{rl} \sigma: & \sigma(1)\cdots\cdots\sigma(i)\,\sigma(i+1)\cdots\cdots\sigma(n) \\ \sigma\tau: & \sigma(1)\cdots\cdots\sigma(i+1)\,\sigma(i)\cdots\cdots\sigma(n) \end{array}$$

Si $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, $\mathrm{Inv}(\sigma\tau) = \mathrm{Inv}(\sigma) + 1$; si $\sigma(i) > \sigma(i+1)$, $\mathrm{Inv}(\sigma\tau) = \mathrm{Inv}(\sigma) - 1$ (aucune autre inversion n'est modifiée par la permutation de ces deux éléments).
Dans les deux cas, $\mathrm{Inv}(\sigma\tau) \leqslant \mathrm{Inv}(\sigma) + 1$ donc si $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Inv}(eg_1 \cdots g_k) \leqslant \mathrm{Inv}(e) + k = k$. On en déduit que $\mathrm{Inv}(\sigma) \leqslant \mathrm{K}(\sigma)$.

Réciproquement, on montre par récurrence sur $\mathrm{Inv}(\sigma)$ que $\mathrm{K}(\sigma) \leqslant \mathrm{Inv}(\sigma)$.

- Si $\mathrm{Inv}(\sigma) = 0$ alors $\sigma = e$ et $\mathrm{K}(e) = 0$.
- Si $\mathrm{Inv}(\sigma) > 0$, on suppose le résultat acquis pour toute permutation σ' telle que $\mathrm{Inv}(\sigma') < \mathrm{Inv}(\sigma)$.
  Considérons une inversion (i, j) de σ, telle que $j - i$ soit minimale, et supposons $i + 1 < j$. Posons $k = i + 1$. Par minimalité (i, k) n'est pas une inversion donc $\sigma(i) < \sigma(k)$. Mais (k, j) n'en est pas une non plus donc $\sigma(k) < \sigma(j)$. Il en résulte que $\sigma(i) < \sigma(j)$, ce qui est absurde.
  σ possède donc une inversion de la forme $(i, i+1)$. En posant $\tau = (i, i+1)$ on en déduit que $\mathrm{Inv}(\sigma\tau) = \mathrm{Inv}(\sigma) - 1$. Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Inv}(\sigma\tau) \geqslant \mathrm{K}(\sigma\tau)$ donc $\mathrm{Inv}(\sigma) \geqslant \mathrm{K}(\sigma\tau) + 1 \geqslant \mathrm{K}(\sigma)$, ce qui permet de conclure.

Question 1.7 Comme on peut s'en douter, il s'agit de montrer que cet algorithme calcule le nombre d'inversions de σ.
Pour justifier la validité de cet algorithme, on commence par prouver un premier invariant :

À l'entrée de la boucle d'indice i, on a $\sigma(j) = j$ pour tout $j > i$.

- C'est clair lorsque $i = n$ (il n'y a rien à prouver).
- Supposons le résultat vrai à l'entrée de la boucle d'indice i. Alors l'entier $k = \sigma^{-1}(i)$ vérifie $k \leqslant i$.
  Si $k = i$ alors $\sigma(i) = i$ et l'invariant reste vrai à l'entrée de la boucle d'indice $i + 1$. Si $k < i$, on remplace σ par $\sigma c_{k,i}$ et les entiers i et $⟦i + 1, n⟧$ sont maintenant invariants par cette nouvelle valeur de σ.

$$\begin{array}{rl} & \quad\;\; \overset{k}{\downarrow} \\ \sigma: & \cdots\cdots\, i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\, (i+1)(i+2)\cdots\,(n-1)\,n \\ \sigma c_{k,i}: & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\, i\,(i+1)(i+2)\cdots\,(n-1)\,n \end{array}$$

Par ailleurs, observons que toutes les valeurs comprises entre i et $i+1$ dans la représentation de σ sont nécessairement inférieures à i ; on en déduit que $\mathrm{Inv}(\sigma c_{k,i}) = \mathrm{Inv}(\sigma) - (i-k)$.
Puisqu'à la fin de l'algorithme $\sigma = e$ on en déduit que la valeur renvoyée par cette fonction (le contenu de la variable inv) vaut $\mathrm{Inv}(\sigma) - \mathrm{Inv}(e) = \mathrm{Inv}(\sigma)$.

Si on remplace la ligne 5 par la ligne 5′ on obtient cependant pas la valeur de $\mathrm{U}(\sigma)$ en sortie, comme on peut le voir sur l'exemple de l'énoncé : $\sigma = (7,2,3,6,1,5,4)$. D'après les question 1.3 et 1.4 on a $\mathrm{U}(\sigma) = 7-3 = 4$, et pourtant l'algorithme modifié renvoie la valeur 5.

Partie 2. Tableaux de Young

Question 2.1 Soit $p \geqslant 1$. Notons $\mathrm{C}(n,p)$ le nombre de partitions λ de n qui vérifient en plus la condition $\lambda_1 \leqslant p$. Le nombre de partitions à proprement parler est égal à $\mathrm{C}(n,n)$.
Si $n = 0$ on a $\mathrm{C}(0,p) = 1$ pour tout $p \geqslant 1$ (en considérant la partition vide).
Si $n > 0$, λ est une partition de n si et seulement si $(\lambda_2, \dots, \lambda_k)$ est une partition de $n - \lambda_1$ qui vérifie $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$. D'où la relation :

$$\mathrm{C}(n,p) = \sum_{\lambda=1}^{\min(n,p)} \mathrm{C}(n-\lambda, \lambda).$$

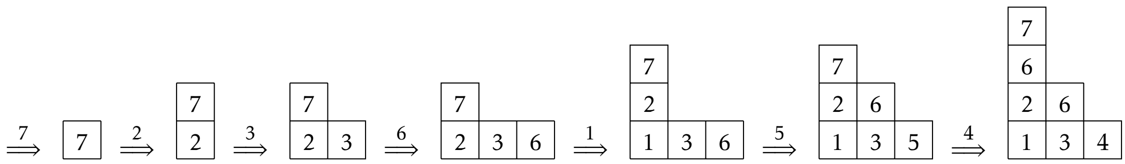
On en déduit l'algorithme :

fonction $\mathrm{C}(n,p)$
  si $n = 0$ **alors**
    renvoyer 1
  else
    $s \leftarrow 0$
    pour k **de** 1 **à** $\min(n,p)$ **faire**
      $s \leftarrow s + \mathrm{C}(n-k,k)$
    renvoyer s

fonction NB_PARTITIONS(n)
  renvoyer $\mathrm{C}(n,n)$

Il est clair qu'un algorithme suivant les principes de la programmation dynamique serait ici plus efficace.

Question 2.2 Commençons par un exemple, en observant le tableau de Young que l'on obtient à partir de l'exemple $\sigma = (7,2,3,6,1,5,4)$ déjà utilisé dans l'énoncé :



On peut observer que la ligne du bas de $\mathrm{P}(\sigma)$ coïncide sur cet exemple avec la ligne du bas de la réussite de la partie I. C'est en fait une propriété générale, que nous allons prouver.
Pour le constater, il suffit d'observer que les modifications de la ligne du bas sont identiques dans cet algorithme comme dans la réussite : si l'élément à insérer est supérieur aux éléments de la ligne du bas, il est disposé à droite de cette ligne ; sinon il remplace la plus petite des valeurs qui lui sont supérieures.
Dès lors, le résultat demandé devient évident en appliquant la question 1.4.

Question 2.3 $\mathrm{P}(\overline{\sigma}) = l_{\sigma(1)} \circ l_{\sigma(2)} \circ \cdots \circ l_{\sigma(n)}(\emptyset)$ donc $\mathrm{P}(\overline{\sigma})^t = c_{\sigma(1)} \circ c_{\sigma(2)} \circ \cdots \circ c_{\sigma(n)}(\emptyset)$.
Or $c_k(\emptyset) = l_k(\emptyset)$ donc $\mathrm{P}(\overline{\sigma})^t = c_{\sigma(1)} \circ c_{\sigma(2)} \circ \cdots \circ l_{\sigma(n)}(\emptyset) = c_{\sigma(1)} \circ \cdots \circ c_{\sigma(n-2)} \circ l_{\sigma(n)} \circ c_{\sigma(n-1)}(\emptyset) = c_{\sigma(1)} \circ \cdots \circ c_{\sigma(n-2)} \circ l_{\sigma(n)} \circ l_{\sigma(n-1)}(\emptyset)$ d'après la propriété de commutation.
En réitérant cette démarche on aboutit finalement à $\mathrm{P}(\overline{\sigma})^t = l_{\sigma(n)} \circ l_{\sigma(n-1)} \circ \cdots \circ l_{\sigma(1)}(\emptyset) = \mathrm{P}(\sigma)$.

Évidemment, la longueur de la plus grande sous-suite décroissante de σ est aussi la longueur de la plus grande des sous-suites croissantes de $\overline{\sigma}$, donc le nombre de cases de la première ligne de $\mathrm{P}(\overline{\sigma})$. D'après ce qui précède, c'est aussi le nombre de cases de la première colonne de $\mathrm{P}(\overline{\sigma})^t = \mathrm{P}(\sigma)$.

Question 2.4 Si σ est une permutation de $[\![1,n^2]\!]$, on a d'après la question 1.3 : $\mathrm{U}(\sigma) = n^2 - \mathrm{L}(\sigma)$. Montrer que $\min(\mathrm{U}(\sigma),\mathrm{U}(\overline{\sigma})) \leqslant n(n-1)$ revient donc à montrer que $\max(\mathrm{L}(\sigma),\mathrm{L}(\overline{\sigma})) \geqslant n$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathrm{L}(\sigma) < n$ et $\mathrm{L}(\overline{\sigma}) < n$. D'après la question précédente, la première ligne et la première colonne de $\mathrm{P}(\sigma)$ comportent chacune strictement moins de n cases. On peut donc inclure le tableau de Young $\mathrm{P}(\sigma)$ dans un carré de $(n-1)^2$ cases, ce qui est absurde puisqu'il doit comporter n^2 cases.

Pour obtenir $\max(\mathrm{L}(\sigma),\mathrm{L}(\overline{\sigma})) = n$ il faut que le tableau de Young soit un carré de $n\times n$; par exemple, avec $\mathrm{T}(i,j) = n(i-1)+j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ on obtient un tel tableau de Young :

$n(n-1)+1$	$n(n-1)+2$	$n(n-1)+3$	$\cdots$	n^2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$\cdots$	$3n$
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\cdots$	$2n$
1	2	3	$\cdots$	n

Il reste à trouver une permutation σ telle que $\mathrm{P}(\sigma) = \mathrm{T}$; on peut choisir par exemple

$$\sigma = (n(n-1)+1, n(n-1)+2,\dots,n^2, n(n-2)+1, n(n-2)+2\dots, n(n-2)+n,\dots, n+1, n+2,\dots,2n,1,2,3,\dots,n))$$

(chaque ligne du tableau est lue de la gauche vers la droite, en commençant par le haut du tableau).

Question 2.5 Pour justifier que l'algorithme de Robinson-Schensted définit une bijection, il suffit de décrire l'algorithme réciproque, c'est-à-dire l'algorithme qui prend en argument deux tableaux de Young P et Q de même forme et de taille n, et qui renvoie la bijection σ ayant produit ces deux tableaux.

La démarche est la suivante : nous allons supprimer les cases de P dans l'ordre inverse de celui dans lequel elles sont apparues, cet ordre étant enregistré dans le tableau Q. Après avoir supprimé la case contenant la valeur x, on réinsère ce dernier dans le tableau de Young de la manière suivante :

– si la case dont provient x n'est pas sur la première ligne, on cherche la plus grande des valeurs y de la ligne inférieure qui soit plus petite que x. x remplace cette valeur y et on réitère la démarche avec y.
– si x est sur la dernière ligne, il n'est pas réinséré : cette valeur est insérée en tête d'une liste σ initialement vide.

Une fois le tableau de Young entièrement vidé, les éléments mémorisés dans la liste σ forment la permutation recherchée.

En particulier, cette correspondance établit une bijection entre Les permutations σ vérifiant $\mathrm{L}(\sigma) = k$ et les couples (P,Q) de tableaux de Young de même forme λ et dont la première ligne est de longueur k. Pour une valeur λ donnée, il y a d_λ^2 couples possibles, ce qui conduit à la formule :

$$\mathrm{card}\Big\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \;\Big|\; \mathrm{L}(\sigma) = k\Big\} = \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda_1=k}} d_\lambda^2.$$

Si on supprime la condition portant sur la valeur de $\mathrm{L}(\sigma)$ on obtient : $n! = \displaystyle\sum_{\lambda\vdash n} d_\lambda^k$.

Question 2.6 Nous allons montrer que dans la correspondance de Robinson-Schensted le cas $\mathrm{P}(\sigma) = \mathrm{Q}(\sigma)$ correspond aux permutations involutives, c'est-à-dire pour lesquelles $\sigma\circ\sigma = e$.
En effet, si $\sigma^{-1} = \sigma$ alors d'après le théorème de Schützenberger $\mathrm{P}(\sigma) = \mathrm{Q}(\sigma)$.
Réciproquement, si $\mathrm{P}(\sigma) = \mathrm{Q}(\sigma)$ alors, toujours d'après le théorème de Schützenberger, les permutations σ et σ^{-1} possèdent la même image par l'algorithme de Robinson-Schensted donc sont égales d'après la question 2.5.

Pour une partition λ donnée, le nombre de couples de tableaux de Young (P,Q) vérifiant $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ est égal à d_λ donc le nombre d'involutions est égal à $\displaystyle\sum_{\lambda\vdash n} d_\lambda$.
Par ailleurs, une involution peut être décomposée en produit de k transpositions à supports deux à deux disjoints (ce produit étant commutatif), avec $0 \leqslant k \leqslant \lfloor n/2\rfloor$. Pour bâtir des k transpositions il faut choisir $2k$ éléments parmi n puis les apparier deux à deux.
Pour apparier ces éléments, imaginons-les rangés par ordre croissant. J'ai $2k-1$ choix possibles pour apparier le plus petit. Une fois ce choix fait, j'ai $2k-3$ choix possibles pour apparier le plus petit *parmi ceux non encore appariés*, etc. En définitive j'ai donc $(2k-1)(2k-3)\cdots 1$ manières d'apparier deux à deux ces $2k$ éléments.
Tout ceci conduit à la formule :

$$\sum_{\lambda\vdash n} d_\lambda = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(2k-1)(2k-3)\cdots 1 = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n!(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{(2k)!(n-2k)!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}.$$

Partie 3. Représentations linéaires du groupe symétrique

Question 3.1 Soit τ une transposition, et Ψ une représentation de dimension 1 de $\mathfrak{S}_n$. On doit avoir $\Psi(\tau)^2 = \mathrm{I}$, ce qui laisse lorsque E est de dimension 1 deux possibilités : $\Psi(\tau) = \pm\mathrm{I}$. Notons $\Psi(\tau) = \varepsilon_\tau \mathrm{I}$ avec $\varepsilon_\tau = \pm 1$.
Soit τ' est une autre transposition dont le support n'est pas disjoint avec celui de τ. Dans ce cas, $\tau\tau'$ est un 3-cycle, et $(\tau\tau')^3 = e$, ce qui impose $(\varepsilon_\tau\varepsilon_{\tau'})^3 = 1$ puis $\varepsilon_\tau = \varepsilon_{\tau'}$.
Si τ et τ' sont deux transpositions quelconques, il existe une suite de transpositions $\tau_0 = \tau, \tau_1, \ldots, \tau_{p-1}, \tau_p = \tau'$ telles que τ_i et τ_{i+1} ne soient pas à supports disjoints. On en déduit que $\varepsilon_\tau = \varepsilon_{\tau'}$ dans tous les cas.
De ceci il résulte qu'il n'y a que deux représentations de dimension 1 : lorsque $\varepsilon_\tau = 1$ c'est la représentation triviale $\Psi : \sigma \mapsto \mathrm{I}$; lorsque $\varepsilon_\tau = -1$ c'est l'application $\Psi : \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)\mathrm{I}$ où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

Question 3.2 Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel il s'agit de montrer que :

(i) pour tout $u \in \mathrm{E}$, $\langle u \mid \cdot \rangle$ est linéaire ;

(ii) pour tout $v \in \mathrm{E}$, $\langle \cdot \mid v \rangle$ est semi-linéaire ;

(iii) pour tout $u, v \in \mathrm{E}$, $\langle u \mid v \rangle = \overline{\langle v \mid u \rangle}$;

(iv) pour tout $u \in \mathrm{E}$, $\langle u \mid u \rangle \geqslant 0$;

(v) pour tout $u \in \mathrm{E}$, $\langle u \mid u \rangle = 0 \Longrightarrow u = 0$.

Sachant que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire et $\Psi(\sigma)$ un automorphisme, aucune de ces propriétés ne pose de problème.

Raisonnons maintenant par récurrence sur $k = \dim(\mathrm{E})$.

- Si $k = 1$, Ψ est nécessairement irréductible.
- Si $k > 1$, supposons le résultat acquis jusqu'au rang $k - 1$.
  Si P*si* est irréductible, le résultat est acquis. Dans le cas contraire, E possède au moins un sous-espace vectoriel sur lequel Ψ peut se réduire. En considérant parmi ceux-ci un sous-espace de dimension minimale, on obtient un sous-espace vectoriel E_1 sur lequel Ψ est irréductible.
  Considérons alors son orthogonal F *pour le produit scalaire* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, et montrons qu'il est lui aussi stable par $\Psi(\sigma)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. En effet, pour tout $u \in \mathrm{F}$ et $v \in \mathrm{E}_1$,

$$\langle \Psi(\sigma)u \mid v \rangle = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \Big(\Psi(\tau)\Psi(\sigma)u \;\Big|\; \Psi(\tau)v\Big) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \Big(\Psi(\tau\sigma)u \;\Big|\; \Psi(\tau)v\Big).$$

  En posant $\tau' = \tau\sigma$ on obtient :

$$\langle \Psi(\sigma)u \mid v \rangle = \sum_{\tau' \in \mathfrak{S}_n} \Big(\Psi(\tau')u \;\Big|\; \Psi(\tau'\sigma^{-1})v\Big) = \sum_{\tau' \in \mathfrak{S}_n} \Big(\Psi(\tau')u \;\Big|\; \Psi(\tau')\Psi(\sigma^{-1})v\Big) = \langle u \mid \Psi(\sigma^{-1})v \rangle,$$

  et puisque E_1 est stable par $\Psi(\sigma^{-1})$, $\langle u \mid \Psi(\sigma^{-1})v \rangle = 0$.
  On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à F et décomposer ce dernier en somme directe de sous-espaces irréductibles pour Ψ : $\mathrm{F} = \bigoplus_{i=2}^{p} \mathrm{E}_i$ et enfin obtenir $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i$.

Question 3.3 Posons $h = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $u \in \mathrm{H}$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le vecteur $\mathrm{S}(\sigma)u$ a pour coordonnées $(u_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, u_{\sigma^{-1}(n)})$ donc :

$$\Big(\mathrm{S}(\sigma)u \;\Big|\; h\Big) = \sum_{i=1}^{n} u_{\sigma^{-1}(i)} = \sum_{j=1}^{n} u_j = (u \mid h) = 0$$

ce qui montre que H est stable par $\mathrm{S}(\sigma)$.
Puisque H est un sous-espace vectoriel non trivial de C^n on en déduit que S est réductible.

Soit maintenant $x \in \mathrm{H}$ tel que $i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$. Nous allons chercher $(n-1)$ permutations $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ de telle sorte que $(\mathrm{S}(\sigma_1)x, \ldots, \mathrm{S}(\sigma_{n-1})x)$ soit une famille libre ; ceci prouvera que $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{C}\mathrm{S}(\sigma)x$ est au moins de dimension $n-1$, donc égale à H compte tenu de ce qui précède.

Sans perte de généralité on peut supposer $x_n \neq 0$. Posons alors $\sigma_1 = e$ et $\sigma_i = (1,i)$ pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$; alors :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{S}(\sigma_1)x, \dots, \mathrm{S}(\sigma_{n-1})x) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} \\ x_2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_1 & & x_3 \\ \vert & \vert & & \ddots & \\ & & & & x_1 \\ x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} & & \boxed{\quad \mathrm{A} \quad} & & \\ x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}).$$

On calcule ensuite $\det \mathrm{A}$ en effectuant les opérations élémentaires : $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i - \mathrm{C}_1$ pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$ puis l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \cdots + \mathrm{L}_{n-1}$:

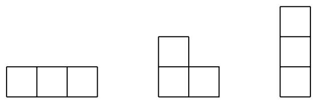
$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} x_1 & (x_2 - x_1) & \text{———} & (x_{n-1} - x_1) \\ x_2 & (x_1 - x_2) & & \\ \vert & & \ddots & \\ x_{n-1} & & & (x_1 - x_{n-1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_n & & & \\ x_2 & (x_1 - x_2) & & \\ \vert & & \ddots & \\ x_{n-1} & & & (x_1 - x_{n-1}) \end{vmatrix} = -x_n(x_0 - x_2)\cdots(x_1 - x_{n-1}) \neq 0.$$

A est inversible donc $\mathrm{rg}(\mathrm{S}(\sigma_1)x, \dots, \mathrm{S}(\sigma_{n-1})x) = n-1$, et ainsi $\displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{C}\mathrm{S}(\sigma)x = \mathrm{H}$.

Supposons alors $\mathrm{S_H}$ réductible, et notons F un sous-espace vectoriel non trivial de H stable par $\mathrm{S}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Considérons un vecteur non nul x de F. Puisque $x \in \mathrm{H}$, ce vecteur possède au moins deux composantes distinctes ; sans perte de généralité supposons par exemple $x_1 \neq x_2$. Posons ensuite $y = \mathrm{S}((1,2))x$. On a $y \in \mathrm{F}$ puisque F est stable donc $u_2 = \dfrac{1}{x_2 - x_1}(y - x) = e_1 - e_2$ appartient aussi à F, où (e) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
De même, pour $3 \leqslant i \leqslant n$ le vecteur $u_i = \mathrm{S}((2,i))u_1 = e_1 - e_i$ appartient à F. Mais $(u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre qui engendre H donc en définitive $\mathrm{F} = \mathrm{H}$, ce qui est absurde.
On en déduit que $\mathrm{S_H}$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$.

Remarque. Il y a peut-être quelque chose qui m'échappe car je n'utilise pas la question précédente pour conclure ...

Question 3.4 Les partitions $\lambda \vdash 3$ sont au nombre de 3 : $\lambda_1 = (3)$, $\lambda_2 = (2,1)$ et $\lambda_3(1,1,1)$ et correspondent aux diagrammes de Ferrers suivants :



On a $d_{\lambda_1} = d_{\lambda_3} = 1$ (pour chacune de ces deux formes, un seul tableau de Young est possible) donc Ψ_{λ_1} et Ψ_{λ_3} sont deux représentations en dimension 1, à savoir celles trouvées à la question 3.1 : l'identité et la signature.
En revanche, $d_{\lambda_2} = 2$ car il existe deux tableaux de Young de cette forme :

$$\begin{array}{|c|c} \hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c} \hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array}$$

Il doit donc exister une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ en dimension 2. D'après la question 3.3 il s'agit (à isomorphisme près) de $\mathrm{S_H}$.
Choisissons pour base de H les vecteurs $u_1 = e_1 - e_2$ et $u_2 = e_1 - e_3$, où (e) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Il faut ensuite, pour chacune des 6 permutations σ de $\mathfrak{S}_3$, exprimer $\mathrm{S_H}(\sigma)(u_1)$ et $\mathrm{S_H}(\sigma)(u_2)$ dans la base (u) :

– $\mathrm{S_H}(e)(u_1) = u_1$ et $\mathrm{S_H}(e)(u_2) = u_2$ donc $\mathrm{S_H}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

– $\mathrm{S_H}((1,2))(u_1) = e_2 - e_1 = -u_1$ et $\mathrm{S_H}((1,2))(u_2) = e_2 - e_3 = -u_1 + u_2$ donc $\mathrm{S_H}((1,2)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

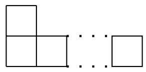
– $\mathrm{S_H}((2,3))(u_1) = e_1 - e_3 = u_2$ et $\mathrm{S_H}((2,3))(u_2) = e_1 - e_2 = u_1$ donc $\mathrm{S_H}((2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

– $\mathrm{S_H}((3,1))(u_1) = e_3 - e_2 = u_1 - u_2$ et $\mathrm{S_H}((3,1))(u_2) = e_3 - e_1 = -u_2$ donc $\mathrm{S_H}((3,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

– $S_H((1,2,3))(u_1) = e_3 - e_1 = -u_2$ et $S_H((1,2,3))(u_2) = e_3 - e_2 = u_1 - u_2$ donc $S_H((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

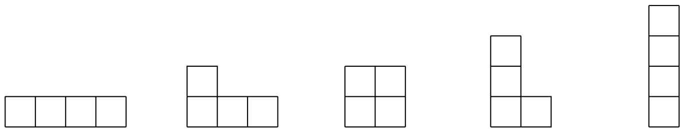
– $S_H((3,2,1))(u_1) = e_2 - e_3 = -u_1 + u_2$ et $S_H((3,2,1))(u_2) = e_2 - e_1 = -u_1$ donc $S_H((3,2,1)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $n \geqslant 2$, considérons la partition $\lambda = (n-1,1)$, qui correspond au diagramme de Ferrers :



On a $d_\lambda = n-1$ car $n-1$ tableaux de Young sont possibles (seuls des entiers $k \in [\![2,n]\!]$ peuvent occuper la case de la deuxième ligne, et une fois le choix de k effectué, il n'y a qu'une manière d'ordonner les éléments restants).

Les partitions de 4 sont au nombre de cinq :

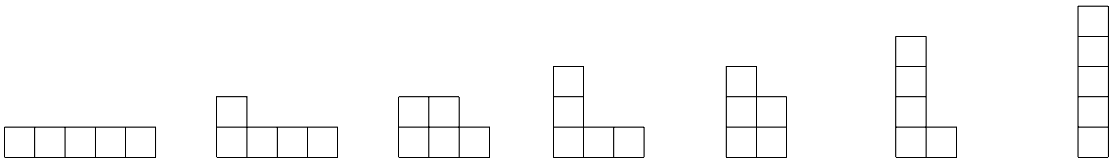


(4) (3,1) (2,2) (2,1,1) (1,1,1,1)

On a $d_{(4)} = d_{(1,1,1,1)} = 1$; il y a deux représentations irréductibles en dimension 1.
On a $d_{(3,1)} = d_{(2,1,1)} = 3$; il y a deux représentations irréductibles en dimension 3.

Enfin, $d_{(2,2)} = 2$ (il n'y a que deux tableaux de Young possibles : $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$) ; il y a une représentation irréductible en dimension 2.

Enfin, les partitions de 5 sont au nombre de sept :



(5) (4,1) (3,2) (3,1,1) (2,2,1) (2,1,1,1) (1,1,1,1,1)

On a $d_{(5)} = d_{(1,1,1,1,1)} = 1$, $d_{(4,1)} = d_{(2,1,1,1)} = 4$, $d_{(3,2)} = d_{(2,2,1)} = 5$ et $d_{(3,1,1)} = 6$ (par recherche exhaustive de tous les tableaux de Young possibles pour une forme donnée), ce qui conduit à :

– deux représentations irréductibles en dimension 1 ;
– deux représentations irréductibles en dimension 4 ;
– deux représentations irréductibles en dimension 5 ;
– une représentation irréductible en dimension 6.